

Exemple Pour $V = \mathbb{P}_2$ et

évaluation de p en 1?

$$(p | q) = p(0) \cdot q(0) + p(1) \cdot q(1) + p(2) \cdot q(2)$$

évaluation de p en 0?

Vérifier les axiomes! $\rightarrow$ Voir le détail dans les notes manuscrites.

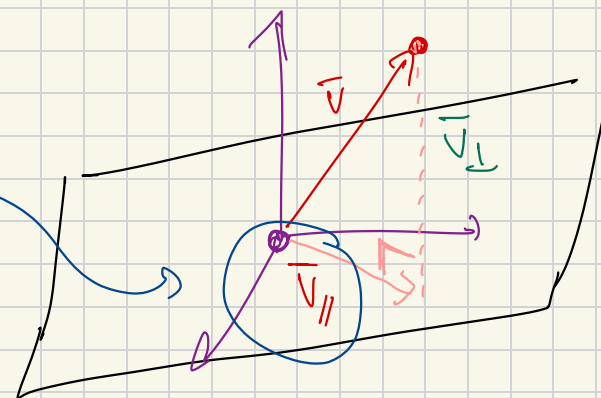
Dans cette séance on va voir

- (i) notion et calcul de la projection orthogonale
- (ii) la méthode Gram-Schmidt

28.11

Idee | $\left\{ \begin{array}{l} W \subseteq \mathbb{R}^n \text{ SEV} \\ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$

projection
orthogonale de
 $\vec{v}$ sur W



on veut
 $\vec{v}_\perp \in W^\perp$
 $\vec{v}_\parallel \in W$
tels que
 $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$

[Thm. 12.32] Pour $W \subseteq \mathbb{R}^n$ SEV, $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, il existe une paire unique $\bar{v}_{||} \in W$ et $\bar{v}_\perp \in W^\perp$ telle que $\bar{v} = \bar{v}_{||} + \bar{v}_\perp$

$\underbrace{\quad}_{=:\text{proj}_W(\bar{v})}$

En plus, $\text{proj}_W(\bar{v})$ est l'unique vecteur de W qui satisfait

projection orthogonale de $\bar{v}$ sur W .

$\|\bar{v} - \text{proj}_W(\bar{v})\| = \min_{\bar{w} \in W} \|\bar{v} - \bar{w}\|$

$$\| \bar{v} - \text{proj}_W(\bar{v}) \| \leq \| \bar{v} - \bar{w} \|, \forall \bar{w} \in W$$

$\text{proj}_W(v)$ est le vecteur de W le plus proche de v

||| $\text{proj}_W(\bar{v})$ est la meilleure approximation de $\bar{v}$ avec des éléments de W

Tout ça sert à prouver des résultats sur la proj. orthogonale
mais pas pour faire des calculs !!!

Row calculator $\text{proj}_W(\vec{v}) \rightarrow$ il faut une BO de W!

[Thm 12.33] Si $W \subseteq \mathbb{R}^n$ on SEV, $\mathcal{B} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ BO de W
 et $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\text{proj}_W(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|^2} \bar{w}_1 + \dots + \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_n}{\|\bar{w}_n\|^2} \bar{w}_n.$$

[Exemple/Exercice]

$W = \text{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_2} \right\} \leftarrow \text{BO de } W$

Calculer $\text{proj}_W(\bar{v}) = \underbrace{-\frac{11}{30}}_{\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{1}{6}}_{\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_2}{\|\bar{w}_2\|^2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Pour calculer $\text{proj}_W(\bar{v})$ on a besoin d'une BO de W !
 Comment la trouver ?? $\longrightarrow$ Procédure de Gram-Schmidt
 (GS)

~~Pour W SEV de $\mathbb{R}^n$~~

Input $\mathcal{B} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k\}$ base de W

Output $\mathcal{B}' = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ B.O. de W

B.O.N
 $\mathcal{B}' = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k\}$
de W

Méthode de GS

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_1 := \bar{w}_1 \\ \bar{v}_2 := \bar{w}_2 - \underbrace{\frac{\bar{w}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1}_{\text{Proj}_{\text{vect}\{\bar{v}_1\}}(\bar{w}_2)} \\ \bar{v}_3 := \bar{w}_3 - \underbrace{\frac{\bar{w}_3 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 - \frac{\bar{w}_3 \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|^2} \bar{v}_2}_{\text{Proj}_{\text{vect}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}}(\bar{w}_3)} \\ \vdots \\ \bar{v}_k := \bar{w}_k - \frac{\bar{w}_k \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 - \dots - \frac{\bar{w}_k \cdot \bar{v}_{k-1}}{\|\bar{v}_{k-1}\|^2} \bar{v}_{k-1} \end{array} \right.$$

Normalisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_1 := \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} \\ \bar{u}_2 := \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} \\ \vdots \\ \bar{u}_k := \frac{\bar{v}_k}{\|\bar{v}_k\|} \end{array} \right.$$

Exemple / Exercice (12.44)

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_3} \right\} \rightsquigarrow W = \text{Vect} \{ \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3 \} \leftarrow \begin{matrix} \mathcal{B} \text{ base} \\ \text{de} \\ W \end{matrix}$$

Construire une BD de W via GS. (et BON aussi)

↳ voir le résultat dans les notes.